E.N.S. ULM-SEVRES session 1987

GROUPE A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les candidats sont invités à lire l'énoncé attentivement. Lors de la correction, il sera tenu compte de la présentation des copies et de la précision des arguments utilisés.

Lorsque la réponse à une question posée ne figure pas dans l'énoncé, le candidat commencera par formuler clairement le résultat qu'il propose de démontrer, avant d'en aborder la démonstration.

Dans ce problème I désigne l'intervalle $[-1, 1]$. Étant donné une application $g : I \to I$ de classe C^1, on appelle *point fixe* de g dans I un nombre $a \in I$ tel que $g(a) = a$. On dit que ce point fixe est *stable* si $|g'(a)| < 1$, *quasi stable* si $|g'(a)| = 1$, *instable* si $|g'(a)| > 1$. L'application itérée n-ième $g \circ g \circ \ldots \circ g$ (n fois) de g est notée $g^{\circ n}$ pour éviter toute confusion avec la puissance n-ième.

Première partie

1. Soit $\lambda \in [0, 2[$. Déterminer les points fixes dans I de l'application $x \longmapsto 1 - \lambda x^2$ et étudier leur stabilité.

2. Soit $g : I \to I$ une application de classe C^1 et soit p un entier $\geqslant 1$. Une partie F de I est appelée orbite périodique de g de période p, si elle remplit les conditions suivantes :

   i. On a $g(F) \subset F$;

   ii. F a p éléments;

   iii. Les seules parties F' de F telles que $g(F') \subset F'$ sont $\varnothing$ et F.

Tournez la page S. V. P.

Soit F une telle orbite et soit a un point de F. Quels sont les autres points de F ? Montrer que a est un point fixe de $g^{\circ p}$ et que le fait que ce point fixe soit stable, quasi stable ou instable ne dépend pas du choix de a dans F. Suivant le cas où l'on se trouve, on dira alors que l'orbite F est *stable*, *quasi stable* ou *instable*.

Supposons F stable. Quel est le comportement de la suite $(g^{\circ n}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $b \in I$ est proche de F ? OK

3. Soit $\lambda \in [0, 2[$. Déterminer les orbites périodiques de période 2 de l'application $f : x \longmapsto 1 - \lambda x^2$ dans I, et étudier leur stabilité. Situer le point fixe de f par rapport aux deux points d'une telle orbite.

4. Supposons $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Posons $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Pour $a \in I$, étudier le comportement de la suite $(f^{\circ n}(a))_{n\in\mathbb{N}}$. (On pourra considérer les sous-suites de cette suite formées par les termes d'indice pair d'une part, d'indice impair de l'autre.)

5. Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\lambda_0 \in [0, 2[$ tel que 0 appartienne à une orbite périodique de période 3 de l'application $x \longmapsto 1 - \lambda_0 x^2$. Combien d'orbites périodiques de période 3 l'application $x \longmapsto 1 - \lambda x^2$ a-t-elle dans I lorsque $\lambda \in [\lambda_0, 2[$?

Deuxième partie

On note $\mathfrak{S}$ l'ensemble des applications $g : I \to I$ de classe C^3 telles que

$$2\, g'''(x)\, g'(x) < 3\,(g''(x))^2$$

pour tout $x \in I$ tel que $g'(x) \neq 0$.

1. Vérifier que si f, g sont dans $\mathfrak{S}$, $g \circ f$ aussi.

2. Soit $g \in \mathfrak{S}$ et soit $J \subset I$ un intervalle sur lequel g' ne s'annule pas. Étudier la convexité de $\dfrac{1}{\sqrt{|g'|}}$ sur J.

3. Soit $g \in \mathfrak{S}$. Montrer que si $|g'|$ admet un minimum local en un point a de $]-1, 1[$, on a $g'(a) = 0$.

4. Soient $a < b < c$ trois points fixes dans I d'une application $g \in \mathfrak{S}$. Montrer que si g' ne s'annule pas sur $]a, c[$, on a $g'(b) > 1$.

5. Soient $h : I \to I$ une application de classe C^1 et $a \in]-1, 1[$ un point fixe de h tel que $0 < h'(a) < 1$. Montrer qu'il existe $b \in]a, 1]$ remplissant l'une des conditions suivantes :
   i. $h(b) = b$ et $h'(x) \neq 0$ pour $x \in]a, b[$;
   ii. $h'(b) = 0$ et $h'(x) \geqslant 0$, $h(x) < x$ pour $x \in]a, b]$;
   iii. $b = 1$ et $h'(x) > 0$, $h(x) < x$ pour $x \in]a, b]$.

   Étudier la suite $(h^{\circ n}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque b remplit la condition ii ou iii.

6. Soit $g \in \mathfrak{S}$ et soit $a \in I$ un point fixe stable de g. Montrer qu'il existe $b \in I$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} g^{\circ n}(b) = a$ et que l'on ait $b = 1$, $b = -1$ ou $g'(b) = 0$.
   (On pourra commencer par traiter le cas où $0 < g'(a) < 1$.)

7. Étendre les résultats du nº 6 au cas où, au lieu de supposer le point fixe a stable, on le suppose quasi stable.

Troisième partie

Soit $\lambda \in [0, 2[$. Montrer que si l'application $f : x \longmapsto 1 - \lambda x^2$ a une orbite périodique F stable ou quasi stable dans I, la distance de $f^{\circ n}(0)$ à F tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Montrer que f a *au plus une* orbite périodique stable ou quasi stable dans I, et que pour certaines valeurs de λ elle n'en a aucune.

• • •
•

ENS ULM GROUPE A 2° ÉPREUVE MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

(A. Pommellet, professeur de mathématiques supérieures au lycée Louis-le-Grand.)

PRELIMINAIRES

Rappelons tout d'abord quelques faits bien connus concernant les suites récurrentes réelles, pour cela soient J un intervalle réel, et f une application de J dans J.

(1) Pour tout a de J, il existe une suite (u_n) à valeurs dans J telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(2) Si la suite (u_n) définie ci-dessus converge vers un réel l de J, la continuité de f en l entraine $f(l) = l$.

(3) Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone.

(4) Si f est décroissante, la fonction $f \circ f$ étant alors croissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Ajouté aux observations suivantes, un dessin aide à suivre certains raisonnements : si le graphe de f est situé au dessus de la diagonale, c'est à dire si $f(x) \geq x$ pour tout x de J, la suite (u_n) croit ; si le graphe de f est situé en dessous de la diagonale, c'est à dire si $f(x) \leq x$ pour tout x de J, la suite (u_n) décroit.

PREMIÈRE PARTIE

1°) Si $\lambda = 0$, $f = 1$ et la suite (u_n) stationne au point fixe stable 1. Ce cas ne sera pas repris dans la suite.

Lorsque : $0 < \lambda < 2$, l'équation réelle $\lambda x^2 + x - 1 = 0$ admet les solutions :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$$

Comme $\lambda > 0$, il vient $1 < 1 + 4\lambda < (1+2\lambda)^2$ et donc $0 < x_1 < 1$; d'autre part $\lambda < 2$ entraine $\sqrt{1+4\lambda} > 2\lambda - 1$ et donc $x_2 < -1$

le seul point fixe dans I de l'application $x \xrightarrow{f} 1-\lambda x^2$ est donc $x_\lambda = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$

Pour étudier la stabilité de x_λ, on évalue $|f'(x_\lambda)| = \sqrt{1+4\lambda}-1$, x_λ est alors stable si et seulement si $\sqrt{1+4\lambda} < 2$, ce qui conduit aux résultats suivants :

si $0 < \lambda < \frac{3}{4}$, x_λ est un point fixe stable

si $\lambda = \frac{3}{4}$, x_λ est un point fixe quasi-stable

si $\lambda > \frac{3}{4}$, x_λ est un point fixe instable

2- Appelons σ la restriction de g à F.

Comme $\sigma(F)$ est une partie non vide de F stable par g, $\sigma(F) = F$ ce qui entraîne, F étant fini, que σ est bijective. Dans la décomposition en cycles de σ, chaque support est non vide et stable par g donc égal à F, par suite σ est un cycle de longueur p et donc :

$F = \{\sigma^{ok}(a) \mid 0 \leq k \leq p-1\} = \{g^{ok}(a) \mid 0 \leq k \leq p-1\}$,

de plus $\sigma^{op}(a) = a = g^{op}(a)$ donc a est un point fixe de g^{op}.

Une récurrence facile montre alors que :

$$(g^{op})'(a) = \prod_{k=0}^{p-1} g'(g^{ok}(a)) = \prod_{x \in F} g'(x)$$

d'où il résulte que la valeur de $(g^{op})'(a)$ ne dépend pas du point a choisi dans F, et aussi, à fortiori, le fait que ce point fixe de g^{op} soit stable, quasi-stable ou instable.

Montrons tout d'abord que, si a est un point fixe stable d'une application de classe C^1 $h : I \to I$, il existe un voisinage U de a tel que $h(U) \subset U$

et que toute suite récurrente (u_n) définie par $u_0 \in U$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n, converge vers a.

[Pour cela, choisissons un réel k tel que $|h'(a)| < k < 1$, la continuité de h' entraîne alors l'existence d'un réel $c > 0$ tel que pour tout x de $U = [a-c, a+c] \cap I$ on ait $|h'(x)| \leq k$. Si $x \in U$, le théorème des accroissements finis appliqué à $[a, x]$ nous donne l'inégalité $|h(x) - a| \leq k|x-a|$, comme $h(x)$ appartient alors à U, on en déduit par récurrence que : $|\overset{\circ n}{h}(x) - a| \leq k^n |x-a|$ pour tout n de $\mathbb{N}$, comme $k \in [0, 1[$, $(\overset{\circ n}{h}(x))$ converge vers x].

L'application de ce résultat à $\overset{\circ p}{g}$ et à son point fixe stable a fournit un voisinage U_a de a tel que, si $b \in U_a$, la suite $(\overset{\circ np}{g}(b))$ converge vers a. Prouvons que, si $b \in U_a$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\overset{\circ n}{g}(b))$ est F. $\overset{\circ k}{g}$ est continue pour $k = 0, \dots, p-1$ donc $\overset{\circ k}{g}(\overset{\circ pn}{g}(b)) = \overset{\circ pn+k}{g}(b)$ converge vers $\overset{\circ k}{g}(a)$ pour $k = 0, \dots, p-1$.

Par suite F est contenu dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\overset{\circ n}{g}(b))$. En sens inverse, si l est une valeur d'adhérence de $(\overset{\circ n}{g}(b))$, il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(\overset{\circ \varphi(n)}{g}(b))$ converge vers l. Tout entier $\varphi(n)$ étant congru à l'un de $0, \dots, p-1$ modulo p, le principe des tiroirs nous permet d'affirmer qu'il existe k dans $\{0, \dots, p-1\}$ tel que l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \equiv k [p]\}$ soit infini. Ceci permet d'extraire de $(\overset{\circ \varphi(n)}{g}(b))$ une suite convergeant vers $\overset{\circ k}{g}(a)$, donc $l = \overset{\circ k}{g}(a)$, d'où la conclusion souhaitée.

Choisissons maintenant, pour tout a de F, un voisinage

V_a de a satisfaisant aux conditions ci-dessus, $\bar{U} = \bigcup_{a \in F} V_a$ est alors un voisinage de F répondant à la question.

Dans toute la suite du problème, une orbite périodique de g de longueur p sera simplement appelée une p-orbite de g.

3- Pour tout x de I, nous avons, après calcul :

$$f \circ f(x) - x = (1 - x - \lambda x^2)(\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda)$$

(Trouver la factorisation est simple si l'on note que toute racine x de $f(x) = x$ vérifie $f \circ f(x) = x$.)

L'élément x de I est alors dans une orbite périodique de période 2 de f si, et seulement si $f \circ f(x) = x$ et $f(x) \neq x$, il faut donc que : $1 - x - \lambda x^2 \neq 0$ et $\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda = 0$, ce qui impose : $\lambda \in [\frac{3}{4}, 2[$ et $x = \frac{1 + \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}$

- si $\lambda = \frac{3}{4}$, x est un point fixe de f ce qui est exclu
- si $\frac{3}{4} < \lambda < 2$, les nombres $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}$ et $\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}$ sont visiblement dans I et distincts, il reste à vérifier que ce ne sont pas des points fixes de f. Si les équations $\lambda^2 y^2 - \lambda y + 1 - \lambda = 0$ et $\lambda y^2 + y - 1 = 0$ ont une racine commune y, il vient $2\lambda y = 1$, d'où $y = \frac{1}{2\lambda}$, $\sqrt{4\lambda - 3} = 0$ et $\lambda = \frac{3}{4}$ ce qui est écarté, donc α_1 et α_2 sont dans une 2-orbite de f et ce sont les seuls éléments de I possédant cette qualité ; donc la 2-orbite de f est $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Il faut ensuite étudier, pour λ dans $]\frac{3}{4}, 2[$, la stabilité de l'orbite $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, et dans ce but estimer d'après I-2 le réel $|(f\circ f)'(\alpha_1)| = 4\lambda^2 |\alpha_1 f(\alpha_1)| = 4 \cdot |\lambda - 1|$

L'orbite $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de f est donc stable si et seulement si $4|\lambda - 1| < 1$, c'est à dire $\lambda \in \left]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right[$. Résumons :

$0 \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$ Pas d'orbite périodique de période 2

$\frac{3}{4} < \lambda < \frac{5}{4}$ Une orbite de période 2, stable

$\lambda = \frac{5}{4}$ Une orbite de période 2, quasi-stable

$\frac{5}{4} < \lambda < 2$ Une orbite de période 2, instable

Enfin, avec les notations de I-1 :

$\lambda^2 x_\lambda^2 - \lambda x_\lambda + 1 - \lambda = 1 - 2\lambda x = 2 - \sqrt{1+4\lambda} < 0$ pour $\lambda > \frac{3}{4}$

ce qui montre que le point fixe de f est strictement compris entre les points de l'orbite de période 2 de f.

I-4°). Pour λ dans $[0,1]$, $f(a)$ est positif. Quitte à décaler la suite $(\overset{on}{f}(a))$ d'un cran, nous pouvons supposer : $a \in [0,1]$. Comme f décroit sur $[0,1]$, les résultats préliminaires nous permettent d'affirmer que les suites $(\overset{o2n}{f}(a))$ et $(\overset{o2n+1}{f}(a))$ sont monotones, donc convergent dans le segment $[0,1]$ vers des points fixes de la fonction continue $f\circ f$.

Distinguons deux cas :

1er cas : $0 \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$ Le seul point fixe de $f\circ f$ est, d'après I-3°), x_λ, donc $(\overset{o2n}{f}(a))$ et $(\overset{o2n+1}{f}(a))$ convergent vers x_λ et par suite $(\overset{on}{f}(a))$ tend vers x_λ

2e cas : $\frac{3}{4} < \lambda \leq 1$. Si $a = x_\lambda$, $(\overset{on}{f}(a))$ stationne à x_λ

Supposons : $a \neq x_\lambda$. Comme f est injective, chaque $\overset{on}{f}$ l'est et donc $u_n = \overset{on}{f}(a) \neq x_\lambda = \overset{on}{f}(x_\lambda)$ pour tout n :

Si u_n converge, c'est nécessairement vers x_λ et alors $\left|\frac{u_{n+1}-x_\lambda}{u_n-x_\lambda}\right| = \left|\frac{f(u_n)-f(x_\lambda)}{u_n-x_\lambda}\right|$ tend vers $|f'(x_\lambda)|>1$, d'où un réel $k>1$ tel que : $|u_{n+1}-x_\lambda| \geq k|u_n-x_\lambda|$ pour $n \geq n_0$ convenable, en contradiction avec : $\lim u = x_\lambda$.

Ainsi, $(\overset{on}{f}(a))$ diverge. Donc $(\overset{o2n}{f}(a))$ converge vers α_1 et $(\overset{o2n+1}{f}(a))$ vers α_2 ou inversement. Plus précisement, comme $\alpha_2 < x_\lambda < \alpha_1$ et que $x<x_\lambda$ équivaut dans $[0,1]$ à $f(x)>x_\lambda$, nous obtenons :

si $0 \leq a < x_\lambda$, $(\overset{o2n}{f}(a))$ converge vers α_2 et $(\overset{o2n+1}{f}(a))$ vers α_1

si $x_\lambda < a \leq 1$, $\overset{o2n}{f}(a)$ converge vers α_1 et $(\overset{o2n+1}{f}(a))$ vers α_2.

I-5°) On a : $\overset{o3}{f}(0) = 1-\lambda(1-\lambda)^2$, l'étude des variations de ce polynôme du troisième degré en λ montre qu'il s'annule une fois et une seule pour une valeur λ_0 de $]1,2[$. Comme $f(0)=1$, $\overset{o2}{f}(0) = 1-\lambda_0 < 0$ et $\overset{o3}{f}(0)=0$ les trois nombres $0, f(0)$ et $\overset{o2}{f}(0)$ sont distincts, ce qui montre que $\{0, f(0), \overset{o2}{f}(0)\}$ est bien une orbite périodique de période 3 de f.

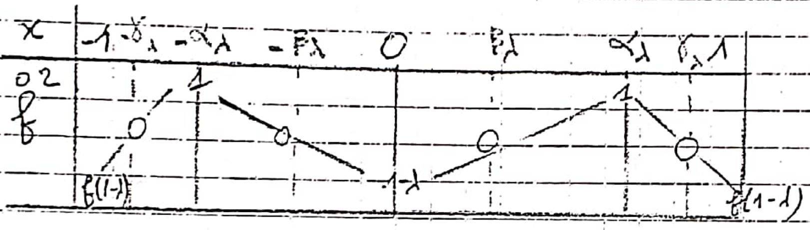
Soit maintenant λ dans $]\lambda_0,2[$. Si x est dans une 3-orbite de f, $x \to 1-\lambda x^2$, $\overset{o3}{f}(x)-x=0$, donc x est racine d'une équation de degré 8, possèdant déjà les racines $x_\lambda = \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ et $-\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ de $f(x)=x$, il y a donc au plus deux 3-orbites de f dans I.

D'autre part $\overset{o3}{f}(x)=x$ et $\overset{o2}{f}(x)=x$ entraînent $f(x)=x$, donc toute solution $x\in I$ de $\overset{o3}{f}(x)=x$, distincte de x_λ, engendre une 3-orbite de f.

Etudions les variations de $\overset{o3}{f}$, à cet effet il est utile de faire les observations suivantes :

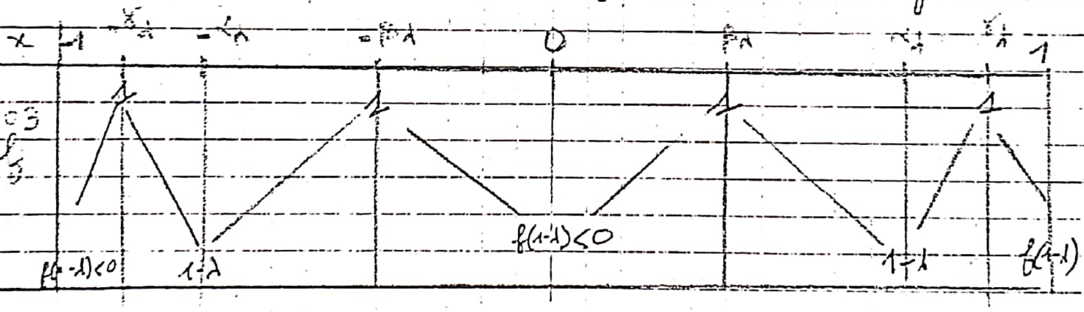
- f est paire, donc aussi ses itérées, l'étude se fait donc sur $[0,1]$,
- les variations s'obtiennent par composition de fonctions monotones, tout calcul de dérivée est inutile
- Si $\alpha_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ est l'unique zéro de f sur $[0,1]$, l'étude de $f^{\circ 3}(0) = 1-\lambda(1-\lambda)^2$ montre que $f(1-\lambda)<0$ et $1-\lambda<-\alpha_\lambda$ pour tout λ de $]\lambda_0, 2[$, donc $f^{\circ 3}(\alpha_\lambda) = f^{\circ 2}(0) < 0$.

Le tableau de variations de $f^{\circ 2}$ est alors le suivant :



β_λ (resp γ_λ) est l'unique zéro de $f^{\circ 2}$ sur sur $[0,\alpha_\lambda]$ (resp. $[\alpha_\lambda, 1]$)

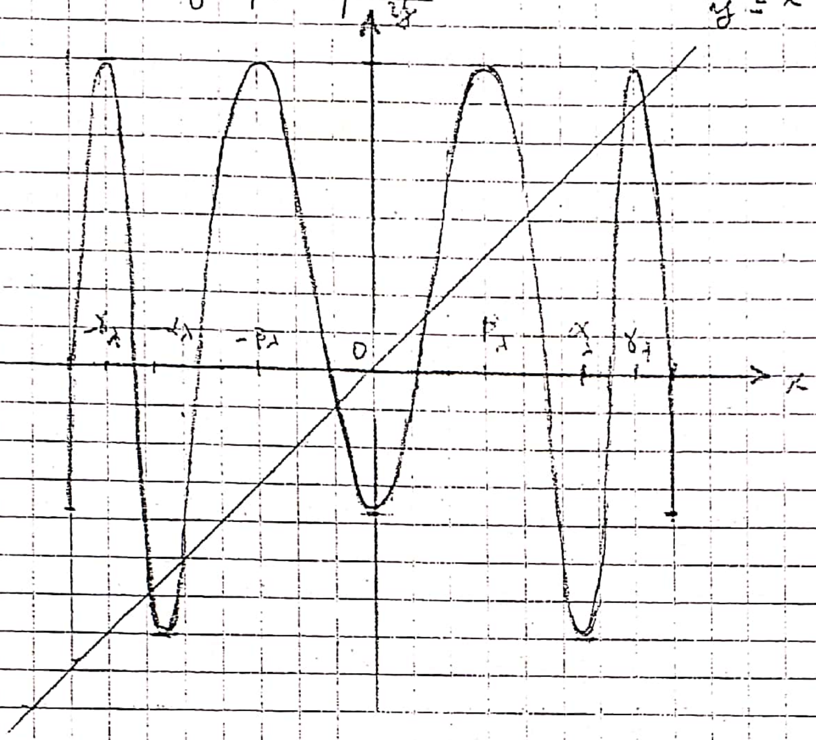
Nous en déduisons le tableau de variation de $f^{\circ 3}$:



Montrons brièvement comment l'on déduit les variations de $f^{\circ 3}$ de celles de $f^{\circ 2}$: lorsque x croît de 0 à β_λ, $f^{\circ 2}(x)$ croît de $1-\lambda$ à 0, comme f croît sur $[-1,0]$, $f^{\circ 3}(x)$ croît de $f^{\circ 3}(0) = f(1-\lambda)$ à $f^{\circ 3}(\beta_\lambda) = f(0) = 1$; lorsque x croît de β_λ à α_λ, $f^{\circ 2}(x)$ croît de 0 à 1 et donc $f^{\circ 3}(x)$ décroît de 1 à $1-\lambda$; on procède de même sur $[\alpha_\lambda, \gamma_\lambda]$ et $[\gamma_\lambda, 1]$ puis l'on complète le tableau par parité.

L'étude du signe de $f^{\circ 3}(x) - x$ montre alors que $f^{\circ 3}$ possède un point fixe dans les cinq intervalles de la subdivision $(-\beta_\lambda, 0, \beta_\lambda, \alpha_\lambda, \gamma_\lambda, 1)$, comme $f(-\alpha_\lambda) = 1-\lambda < -\alpha_\lambda$, et $f(-\gamma_1) = 1 > -\gamma_1$ nous voyons apparaître deux nouveaux points fixes de $f^{\circ 3}$, ce qui, avec les remarques préliminaires, permet d'affirmer que f possède exactement deux 3-orbites.

Représentation graphique :



Deuxième partie

II - 1°) Omettons la variable x pour ne pas alourdir, il vient

$$(g\circ f)' = (g'\circ f)f'$$

$$(g\circ f)'' = (g''\circ f)f'^2 + (g'\circ f)f''$$

et $$(g\circ f)''' = (g'''\circ f)f'^3 + 3(g''\circ f)f'f'' + (g'\circ f)f'''$$

Supposons alors, au point x, $(g\circ f)' \neq 0$; $g'\circ f$ et f' sont alors non nulles et l'on a puisque f et g sont dans $\mathcal{S}$:

$2f'''.f' < 3f''^2$ et $2(g'''\circ f)(g'\circ f) < 3(g''\circ f)^2$, d'où il résulte que : $2(g\circ f)'''(g\circ f)' = [2(g'''\circ f)f'^3 + 6(g''\circ f)f'f'' + 2(g'\circ f)f'''](g'\circ f)f'$
$< 3(g''\circ f)f'^4 + 6(g''\circ f)(g'\circ f)f'^2 f'' + 3(g'\circ f)^2 f''^2 = 3(g\circ f)''^2$, donc $g\circ f \in \mathcal{S}$.

II - 2°) Comme g' est continue, il existe un réel ε dans $\{-1,1\}$ tel que : $\varepsilon g' > 0$ sur J. Un calcul facile nous donne alors $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon g'}}\right)'' = \frac{3}{4}(\varepsilon g')^{-\frac{5}{2}}(3g''^2 - 2g'g''')$, qui est strictement positif puisque g est dans $\mathcal{S}$, la fonction considérée est donc convexe.

II - 3°) Raisonner par l'absurde, c'est supposer que : $|g'(a)| > 0$. Moyennant la continuité de g', nous pouvons trouver un intervalle ouvert J, contenant a, sur lequel g' ne s'annule pas. D'après II - 2°), $h : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|g'(x)|}}$ est alors convexe sur J, et admet un maximum local en a, J étant ouvert ; $h'(a) = 0$, la convexité de h fait alors que h est au dessus de sa tangente en a : $h(x) \geq h(a) + h'(a)(x-a) = h(a)$ sur J, ce qui entraîne que h est constante sur J, de valeur $h(a)$. $|g'|$ est alors constante > 0, donc la fonction continue g' est constante $\neq 0$, et par suite, $g'(a) \neq 0$, $g'''(a)g'(a) = 0 = \frac{3}{2}g''(a)^2$, contrairement au fait que g est dans $\mathcal{S}$. Donc $g'(a) = 0$.

II - 4°) Supposons au contraire que : $g'(b) \leq 1$. Comme a, b et c sont fixes par g, l'application de l'égalité des accroissements finis à g sur $[a,b]$ et $[b,c]$ nous donne d dans $]a,b[$ et e dans $]b,c[$ tels que : $g'(d) = g'(e) = 1$.
Posons $m = \inf\limits_{x \in [e,d]} g'(x)$. Si $m < 1$, il existe u dans $]e,d[$ tel que $g'(u) = m$, g' présente alors un minimum local en u, avec II - 3°), donc $g''(u) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur g' ; si $m = 1$, g' admet un minimum local en b, d'où à nouveau une contradiction.

II - 5°) Notons tout d'abord que de $0 < h(a) < 1$ et du développement limité : $h(x) = h(a) + h'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$, $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, résulte l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que (1) pour tout x de $[a, a+\alpha]$, $h'(x) > 0$ et (2) $h(x) < x$ sur $]a, a+\alpha]$.

Désignons par F le fermé $\{x \in [a+\alpha, 1] \mid f(x) = x\}$

1er cas : F est non vide. On pose $b_0 = \min F$, b_0 est dans F car F est fermé, puis l'on distingue :

- Pour tout x de $]a, b_0[$, $h'(x) \neq 0$: $b = b_0$ convient alors (2)
- Il existe x dans $]a, b_0[$ tel que $h'(x) = 0$, il est de ce fait licite d'introduire $b = \min\{x \in [a+\alpha, b_0[\mid h'(x) = 0\}$; il vient : $h(x) < x$ sur $]a, b]$, sinon avec (2) $h(x) - x$ change de signe sur $]a, b]$ et donc s'annule ; puis $h'(x) > 0$ sur $]a, b[$ avec (2) et la même raison : b vérifie (ii) dans ce cas.

2e cas : F est vide. Si h' ne s'annule pas sur $[a, 1]$, on prouve comme ci-dessus à l'aide de (1) et (2) que (iii) est vérifiée ; sinon l'on pose : $b = \min\{x \in [a, 1] \mid h'(x) = 0\}$ et b convient alors pour (ii) ; par la méthode usuelle.

On suppose la condition (ii) vérifiée : Par continuité, $h(b) \leq b$, la croissance de h sur $[a, b]$ entraîne alors : $h([a, b]) \subset [a, b]$.

D'après les résultats préliminaires la suite monotone bornée $(h^{o n}(b))$ converge vers l'unique point fixe de h sur $[a, b]$ c'est à dire a.

Si cette fois b remplit la condition (iii), $b = 1$ et une preuve analogue montre que $(h^{o n}(1))$ converge vers a.

II - 6°) Écartons tout d'abord le cas où $g'(a) = 0$; $b = a$ convient.

1er cas $0 < g'(a) < 1$. Appliquons II - 5°) à $h = g$

- Si b remplit la condition (iii), $b = 1$ convient pour II-6°)
- Si b satisfait à la condition (ii), $(\overset{\circ n}{g}(b))$ converge vers a et II-6°) est à nouveau vraie car $g'(b) = 0$.
- Reste enfin le cas où b vérifie (i). Comme $g \in \mathcal{G}$, on peut appliquer II - 4°) à c, a, b pour tout c de I : nous voyons qu'il n'existe pas de point fixe $c < a$ tel que g' ne s'annule pas sur $]c, a[$. Envisageons alors les possibilités suivantes :

α) g' ne s'annule pas sur $[-1, a]$; g ne possède donc pas de point fixe sur $[-1, a[$, et comme $g'(a) > 0$, g est croissante sur $[-1, a]$, d'où $g([-1, a]) = [g(-1), g(a)] \subset [-1, a]$, $(\overset{\circ n}{g}(-1))$ converge alors vers l'unique point fixe de g sur $[-1, a]$ c'est à dire a.

β) g' s'annule sur $[-1, a]$. On pose - c'est licite - $b = \max\{x \in [-1, a[\mid g'(x) = 0\}$. g' est alors du signe de $g'(a)$, donc > 0, sur $]b, a]$. $(\overset{\circ n}{g}(b))$ converge alors vers l'unique point fixe de g sur $[b, a]$, c'est à dire a.

2e cas $-1 < g'(a) < 0$ Posons $g_0 = g \circ g$. D'après II - 1°, g_0 est dans $\mathcal{G}$, et $g_0'(a) = g'(a)^2$ est dans $]0, 1[$. Il existe avec le 1er cas un élément b de I tel que $(\overset{\circ n}{g_0}(b))$ converge vers a, et $b = 1$, $b = -1$ ou $g_0'(b) = g'(g(b))g'(b) = 0$. La suite $(\overset{\circ n}{g_0}(b)) = (\overset{\circ 2n}{g}(b))$ tend vers a, donc par continuité $\overset{\circ 2n+1}{g}(b)$ tend vers $g(a) = a$; si $b = 1$ ou $b = -1$ la preuve est achevée ; sinon $g'(b) = 0$ ou $g'(g(b)) = 0$

et, quitte à remplacer b par $g(b)$, on trouve b convenable.

II - 7°) Par hypothèse, $|g'(a)| = 1$.

1er cas : $g'(a) = 1$ Notons tout d'abord que $g''(a) = g'''(a) = 0$ est contraire à l'hypothèse : $g \in \mathcal{S}$, on envisage donc les cas :

α) $g''(a) > 0$ Avec Taylor-Young à l'ordre deux en a :

$g(x) = a + (x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + \varepsilon(x)(x-a)$ montre que l'on peut trouver a' dans $]-1,a[$ tel que $g(x) > x$ et $g'(x) > 0$ dans $[a',a[$. L'ensemble :

$$F = \{x \in [-1,a'] \,;\, x = -1 \text{ ou } g(x) = x \text{ ou } g'(x) = 0\}$$

est fermé non vide et majoré donc contient sa borne supérieure b, de sorte que $b \leq a' < a$. Sur $]b,a[$ on a $g(x) > x$ et $g'(x) > 0$ par continuité de g et g', donc $g(b) \geq b$, g est croissante et $g([b,a]) \subset [g(b),a] \subset [b,a]$

Supposons : $g(b) = b$. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $g(x) - x$ entre b et a, nous obtenons c' dans $]b,a[$ tel que $g''(c') = 0$. Soit alors c le plus grand zéro de la fonction continue g'' dans $[b,a]$; comme $g''(a) > 0$ on a : $c < a$ et $g''(x) > 0$ sur $]c,a]$. Ensuite, $g''(c) = 0$ et $g \in \mathcal{S}$ entraine $g'(c)g'''(c) < 0$, comme $g'(c) > 0$, $g'''(c)$ est < 0. Mais ceci contredit : $0 \leq \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{g''(x)}{x-c} = g'''(c)$ (on a : $g''(c) = 0$)

Ainsi $g(b) > b$, comme $b \in F$, on a $g'(b) = 0$ ou $b = -1$, et la suite $(g^{n}(b))$ converge vers l'unique point fixe de g sur $[b,a]$, soit a.

β) $g''(a) < 0$ On applique le cas α) à la fonction de $\mathcal{S}$

$\hat{g} : [-1,1] \to [-1,1]$, $x \to -g(-x)$, et à son point fixe $-a$:

Si b' convient pour $\hat{g}$, $b = -b'$ convient pour g.

γ) $g''(a) = 0$ L'appartenance de g à $\mathcal{S}$ impose alors : $g'''(a) < 0$. La formule de Taylor - Young à l'ordre 3 montre alors qu'il existe a' et a'' vérifiant :

$-1 \leq a' < a < a'' \leq 1$, $g(x) > 0$ sur $[a', a'']$ / $g(x) \geq x$ sur $[a', a[$ et $g(x) < x$ sur $]a, a'']$

Il est alors possible d'appliquer directement la preuve de II - 5°) à $h = g$. L'élément b trouvé répond à la question dans les cas (ii) et (iii). Dans le cas (i), on peut reprendre la preuve donnée dans le 1er cas de II - 6°), qui n'utilise l'hypothèse : $g(a) < 1$ qu'afin de pouvoir user des résultats de II - 5°). Le résultat souhaité est encore obtenu.

2° cas $g(a) = -1$ Le premier cas s'applique alors à $g \circ g$.

On conclut comme en II - 6°), 2° cas.

Troisième partie

1- Supposons donc que $f : x \to 1 - \lambda x^2$ possède une orbite stable ou quasi-stable F, de longueur p, et soit a un point de F.

Comme $f''(x) = -2\lambda < 0$, $f'''(x) = 0$ dans I, f appartient à $\mathcal{S}$, avec II - 1°) nous en déduisons que $f^{\circ p} = g$ est aussi dans $\mathcal{S}$. Usant alors de II - 6° et 7°, nous voyons que l'une des éventualités suivantes est réalisée :

- la suite $(g^{\circ n}(1))$ tend vers a, auquel cas $f^{\circ pn+1}(0)$

/ la fonction continue

tend vers a, en appliquant f^{ok} pour $k=0,\dots,p-1$

nous voyons que $(f^{opn+k+1}(0))$ tend vers $f^{ok}(a)$ pour $k=0,\dots,p-1$,

la même preuve qu'à la fin de I - 2°) nous

permet alors d'en déduire que E est l'ensemble des

valeurs d'adhérence de la suite $(f^{on}(0))$.

- $g^{on}(-1)$ tend vers a, f étant paire, $g^{on}(-1) = f^{opn}(1) = f^{opn}(1)$, ce qui ramène à l'étude précédente,

- il existe b dans I tel que : $g(b) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g^{on}(b) = a$

$g'(b) = 0$ se traduit par : $\prod\limits_{k=0}^{p-1}(-2\lambda\, f^{ok}(b)) = 0$, donc

l'un des $f^{ok}(b)$ est nul, par suite, pour $n \geq k$

convenable, $f^{onp-k}(0)$ tend vers a, ce qui prouve à

nouveau le résultat demandé.

2 - Si f possède une orbite stable ou quasi-stable,

celle-ci est l'ensemble des valeurs d'adhérence de

$(f^{on}(0))$, donc est unique.

3 - Nous noterons ici f_λ l'application : $x \to 1 - \lambda x^2$

et, pour $\lambda > \frac{3}{4}$, $\alpha_1(\lambda)$ et $\alpha_2(\lambda)$ les points de l'unique

2-orbite de f, avec $\alpha_1(\lambda) < \alpha_2(\lambda)$

D'après I - 4°), avec $\lambda = 1$, nous savons que $f_1^{o2n}(0)$ converge

vers $\alpha_1(1)$, et $f^{o2n+1}(0)$ vers $x_2(1)$. De plus : $\alpha_1 < x_\lambda$

(x_λ étant le point fixe de f_λ).

D'autre part, avec les notations de I - 5°) :

$$f_{\lambda_0}^{o3n}(0) = 0, \quad f_{\lambda_0}^{o(3n+1)}(0) = 1, \quad f_{\lambda_0}^{o3n+2}(0) = 1 - \lambda_0,$$

avec : $1 - \lambda_0 < 0 < a_{\lambda_0} < 1$.

On peut de ce fait trouver N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$f_1^{\circ N}(0) > x_1$ et $f_{\lambda_0}^{\circ N}(0) < x_{\lambda_0}$

La fonction continue $\lambda \to f_\lambda^{\circ N}(0) - x_\lambda$ s'annule donc sur $[1, \lambda_0]$ compte-tenu du théorème des valeurs intermédiaires, d'où λ tel que : $\lambda > 1$ et $f_\lambda^{\circ N}(0) = x_\lambda$.

Si f_λ possède une orbite stable ou quasi-stable F, F est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f_\lambda^{\circ n}(0)$; mais pour $n \geq N$, $f_\lambda^{\circ n}(0) = f_\lambda^{\circ n-N} \circ f_\lambda^{\circ N}(0) = x_\lambda$ car x_λ est un point fixe, donc : $F = \{x_\lambda\}$. Comme $\lambda > 1$, $\{x_\lambda\}$ n'est pas une orbite stable, contradiction